A πεπερασμένο: $\exists\, k \in \mathbb{N} : A \simeq T(k)$ 16/01/17

$$\left.\begin{array}{l} \emptyset \neq A_1 \text{ πεπερ.} \\ \emptyset \neq A_2 \text{ πεπερ.} \end{array}\right\} \Rightarrow A_1 \times A_2 : \text{πεπερασμένο με } \operatorname{card}(A_1 \times A_2) = \operatorname{card} A_1 \times \operatorname{card} A_2$$

Απόδειξη: Ας είναι $\operatorname{card} A_1 = n \rightsquigarrow A_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$

$\operatorname{card} A_2 = m \rightsquigarrow A_2 = \{y_1, \dots, y_m\}$

τότε $A_1 \times A_2 = \{ (x,y) : x \in A_1 \wedge y \in A_2 \}$

$$= \{ \underbrace{(x_1,y_1) \dots, (x_1,y_m)}_{X_1}, \underbrace{(x_2,y_1) \dots (x_2,y_m)}_{X_2}, \dots \underbrace{(x_n,y_1) \dots (x_n,y_m)}_{X_n} \}$$

$$= X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \quad \text{με} \quad \underset{(x_i,\ )\ \ (x_j,\ )}{X_i \cap X_j} = \emptyset \ (i \neq j)$$

Επομένως $\operatorname{card}(A_1 \times A_2) = \underset{m}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{card} X_1}} + \underset{m}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{card} X_2}} + \dots + \underset{m}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{card} X_n}}$

$$= n \times m = \operatorname{card} A_1 \times \operatorname{card} A_2$$

Παρατήρηση: Αν $A_1, \dots, A_n$: πεπερασμένα σύνολα, τότε $A_1 \times \dots \times A_n$ πεπερασμένα με $\operatorname{card}(A_1 \times \dots \times A_n) = \operatorname{card} A_1 \cdot \operatorname{card} A_2 \cdot \dots \cdot \operatorname{card} A_n$

(*) A : απέραντο : όχι πεπερασμένο

ΠΡΟΤΑΣΗ: $\mathbb{N}$ απέραντο

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω ότι $\mathbb{N}$ πεπερασμένο τότε $\exists k \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \simeq T(k)$

Επομένως $\exists f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} T(k)$ επειδή $T(k+1) \subseteq \mathbb{N}$ τότε $f(T(k+1))$

$\text{card}\, T(k+1) = k+1$

δηλ. $k+1 \leq k = \text{card}\, T(k)$, άτοπο

ΠΡΟΤΑΣΗ: $\left.\begin{array}{l} A \text{ απέραντο} \\ A \subseteq B \end{array}\right\} \Rightarrow B$ απέραντο

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Υποθέτω ότι το B είναι πεπερασμένο, αν $A = B$, τότε B: απέραντο, άτοπο!

Αν $A \subsetneq B$ με B πεπερασμένο, τότε $\text{card}\, A < \text{card}\, B$, δηλ

A πεπερασμένο, άτοπο!

ΠΡΟΤΑΣΗ: $\left.\begin{array}{l} A \text{ απέραντο} \\ A-B \subseteq A,\ B \text{ πεπερασμένο} \end{array}\right\} \Rightarrow A-B$ απέραντο

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω ότι $A-B$: πεπερασμένο. Τότε, επειδή $A = (A-B) \cup B$ με $(A-B) \cap B = \emptyset$

θα είναι και $\text{card}\, A = \text{card}(A-B) + \text{card}\, B$

δηλ. A πεπερασμένο, άτοπο!

ΠΡΟΤΑΣΗ A: απέραντο $\iff \exists B \subsetneq A : B \simeq \mathbb{N}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $(\Rightarrow)$ Έστω ότι το A είναι απέραντο. Επειδή το A: απέραντο $\Rightarrow$ $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists a_1 \in A$, το σύνολο $A_1 = A - \{a_1\}$ είναι απέραντο (προηγούμενη πρόταση)

B_1

$\rightarrow A_1 \neq \emptyset \Rightarrow \exists a_2 \in A_1$ και

$$A_2 = A_1 - \{a_2\} = A - \{\overset{B_2}{a_1, a_2}\} : \text{απέραντο}$$

Επαγωγικά $\exists B = \{a_1, a_2, \ldots\}$ με $A - B$: απέραντο

Προφανώς $\mathbb{N} \simeq B$ $\left(\begin{array}{l} f: \mathbb{N} \to B \\ \text{με } f(k) = a_k \\ \text{είναι } 1\text{-}1, \text{ επί} \end{array} \right)$

Αντίστροφα, υποθέτω ότι $\exists B \subsetneq A$ με $B \simeq \mathbb{N}$. Θα αποδείξω ότι το A είναι απέραντο.

B ισοδύναμο με το $\mathbb{N}$ άρα B απέραντο και αφού $B \subsetneq A$ άρα (από προηγούμενη πρόταση) A απέραντο.

ΠΡΟΤΑΣΗ: A απέραντο $\iff B \subsetneq A : B \simeq A$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $(\Rightarrow)$ Ας είναι A απέραντο, τότε $\exists A_1 \subsetneq A$ $A \simeq \mathbb{N}$. Ας είναι $= \{a_1, a_2, \ldots\}$. Παρατηρώ ότι $B = A - \{a_1\} \subsetneq A$. Θεωρώ την συνάρτηση $A \to B$ με

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \notin A_1 \\ a_{i+1}, & x \in A, \ (i = 1, 2, \ldots n) \end{cases}$$

Παρατηρώ ότι η f είναι 1-1 (?) και επί (?) και συνεπώς $A \simeq B$ με $B \subsetneq A$.

Το αντίστροφο είναι προφανές.

ΟΡΙΣΜΟΣ: $A \preceq B \iff \exists\, \Gamma \subseteq B : \Gamma \simeq A$

(B υπερισχύει του A)

($A \prec B \iff A \preceq B$ και $A \not\simeq B$)

$A \preceq B \iff \exists\, f : A \xrightarrow{1-1} B$

ΠΡΟΤΑΣΗ: i) $A \preceq B \iff A \prec B : A \simeq B$

ii) $A \subseteq B \Rightarrow A \preceq B$

iii) $A \preceq A$

iv) $\left.\begin{matrix} A \preceq B \\ B \preceq C \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \preceq C$

iv) ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $A \preceq B : \exists\, f : A \xrightarrow{1-1} B$

$B \preceq C : \exists\, g : B \xrightarrow{1-1} C$

$$g \circ f : A \xrightarrow{1-1} C$$

$$\Downarrow$$

$$A \preceq C$$

v) $B \preceq A \iff \exists\, f : A \xrightarrow{\text{επί}} B$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ας είναι $f : A \xrightarrow{\text{επί}} B$. Αρκεί ν.δ.ο. $\exists\, g : B \xrightarrow{1-1} A$. Για $y \in B$, υποσύνολο $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ (f επί). Επιλέγω $a_y \in f^{-1}(\{y\})$ και θέτω $g : B \to A$ $\quad y \to a_y$ (θέλω να δείξω ότι g 1-1)

Αν $y_1, y_2 \in B$ με $g(y_1) = g(y_2)$

τότε $a_{y_1} = g(y_1) = g(y_2) = a_{y_2}$

τότε $f(a_{y_1}) = y_1$, $f(a_{y_2}) = y_2$

$\Rightarrow y_1 = y_2$ // άρα g 1-1

ΠΡΟΤΑΣΗ: A απειροσύνολο $\Leftrightarrow$ $\mathbb{N} \leq A$